**Інструкційна картка**

**проведення практичного заняття №12**

**з дисципліни** ***Вища математика***

**Тема:** **Розв’язування диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними; лінійних та однорідних рівнянь.**

**Мета:** *формувати вміння розв’язувати лінійні та однорідні*

*диференціальні рівняння.*

***Після виконання практичної роботи студент повинен***

**Знати:** *основні види диференціальних рівнянь, загальний розв’язок , задачу Коші.*

**Вміти:** *розв’язувати диференціальні рівняння.*

***Матеріально-технічне оснащення робочого місця***

Інструкційна картка, методичні вказівки, калькулятор.

***Інструктаж з техніки безпеки***

Дотримуватись правил техніки безпеки в навчальній аудиторії.

***Зміст і послідовність виконання завдання***

*1. Розв’язування рівнянь з відокремленими змінними.*

*2. Розв’язування рівнянь з відокремлюваними змінними.*

*3. Розв’язування лінійних диференціальних рівнянь.*

*4. Розв’язування однорідних диференціальних рівнянь.*

***Методичні рекомендації з виконання та оформлення***

*Практичну роботу оформити на подвійних листках.*

***Рекомендована література***

*1. Богомолов М. В.Практичні заняття з математики. Навчальний посібник.* ***–*** *К.: Вища школа,*

*1983. – 447 с., Р 15, § 1-3, с. 255-263.*

*2. Литвин І.І. Вища математика: Навчальний посібник. – Киів: Центр навчальної літератури, - 2004.-368 с., Р 9, п.9.1-9.3, с.174*

Інструкційна картка складена викладачем \_\_\_\_\_\_\_\_\_ Л.О. Петрівська

Розглянуто та схвалено на засіданні циклової комісії

загальноосвітніх дисциплін

Протокол № \_ від \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ серпня 20\_\_ р.

Голова циклової комісії \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ В. Д. Гуменюк

*Теоретичні відомості*

Диференціальним рівнянням називається рівняння, яке пов’язує між собою незалежну змінну , шукану функцію  та її похідні або диференціали.

Диференціальне рівняння називається звичайним, якщо шукана функція залежить від одного незалежного змінного.

Порядком диференціального рівняння називається порядок старшої похідної (або диференціала), яка входить в дане рівняння.

Розв’язком (або інтегралом) диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

Загальним розв’язком (або загальним інтегралом) диференціального рівняння називається такий розв’язок, до якого входить стільки незалежних довільних сталих, який порядок рівняння. Так, загальний розв’язок диференціального рівняння першого порядку має одну довільну сталу.

Частинним розв’язком диференціального рівняння називається розв’язок, знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих. Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значеннях аргументу і функції.

Графік частинного розв’язку диференціального рівняння називається інтегральною кривою.

Загальному розв’язку диференціального рівняння відповідає сукупність всіх інтегральних кривих.

Диференціальним рівнянням називається першого порядку називається рівняння, до якого входять похідні (або диференціали) не вище як першого порядку.

Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними називається рівняння вигляду



Щоб розв’язати це рівняння, треба спочатку відокремити зміні:

,

потім про інтегрувати обидві частини знайденої рівності:

.

**1. Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння**

1. 
2. 
3. ,
4. 
5. 
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. ,
15. 
16. 
17. 
18. .

2. Знайти частковий розв’язок диференціального рівняння

1. ,
2. 
3. 
4. 
5. ,
6. 
7. 
8. 
9. 
10. 
11. 
12. 
13. 
14. 
15. 

**1. Математичні моделі ситуацій та процесів, які приводять до диференціальних рівнянь**

Математичний опис процесів природи, виробництва часто приводять до рівнянь, що пов’язують незалежні змінні, шукану функцію і похідні або диференціали цієї функції. Такі рівняння називаються *диференціальними*.

Мовою диференціальних рівнянь записані закони електромагнітних явищ (рівняння Максвелла), основне рівняння квантової механіки (рівняння Шредінгера), рівняння руху в механіці тощо.

Розглянемо деякі економічні задачі, що приводять до поняття диференціального рівняння.

**а) Задача про нагромадження капіталу**

Нехай підприємство (фірма) з початковим капіталом  розпочало діяльність, мета якої – нагромадження капіталу. Функція капіталу  із часом змінюється. Опишемо динаміку такого процесу.

Введемо позначення:  - капітал підприємства (фірми) в момент часу ;  - капітал фірми в момент часу . Тоді різниця



дає приріст капіталу за інтервал часу . Він складається з доходу за інтервал часу  та повних витрат виробництва. В загальному даний приріст можна визначити за формуло.

, (16.1)

де  - приріст функції доходу;  - приріст функції повних витрат підприємства.

Формула (16.1) і є ***рівнянням нагромадження капіталу***. Для того, щоб його розв’язати потрібно знайти функцію доходу  і функцію повних витрат  фірми. *Ця проблемо є однією з найважливіших у теорії моделювання економічних процесів*.

Нехай розглядається випадок, коли прирости функцій  та  мають вигляд:

, .

Додатні коефіцієнти  і  характеризують інтенсивність зміни доходу й повних витрат фірми відповідно. Тоді формулу (16.1) запишемо у вигляді:

, (16.2)

де .

Поділивши формулу (16.2) на  та перейшовши до границі при , дістанемо диференціальне рівняння

, або . (16.3)

**б) Задача про рух фондів**

Позначимо через  обсяг фондів (у натуральній або вартісній формі) у момент часу . Під фондами розуміють обладнання, прилади, приміщення тощо. Все це може ламатися, спрацьовуватися, старіти тощо. Про цей процес кажуть, що фонди вибувають. Швидкість вибуття фондів виражається через коефіцієнт вибуття. Наприклад, якщо за 10 років фонди повністю оновлюються, то коефіцієнт вибуття дорівнює 0,1.

Позначимо коефіцієнт вибуття через . Отже, вибуття веде до зменшення фондів за рік на величину , а за інтервал часу  на величину  (вважається, що вибуття фондів рівномірно).

Натомість інвестиції – вкладання грошей – ведуть до збільшення фондів. Нехай інвестиції в розмірі  () за рік дадуть збільшення фондів на величину  (можна було б вважати, що , але частина інвестицій йде на заробітну плату проектувальникам, будівельникам, тобто не на пряме збільшення фондів). Тоді за час  інвестиції в разі їх рівномірного вкладання дадуть збільшення фондів на величину .

Розглянемо довільний момент часу  і його приріст . Тоді зміна фондів за час  становитиме:

. (16.4)

А при  дістанемо диференціальне рівняння

. (16.5)

**в) Задача про рекламу**

Нехай торговельними фірмами реалізується продукція, про яку в момент часу  знають лише  покупців із числа потенційних . Після оголошення реклами швидкість зміни кількості покупців, яким відомо про продукцію, пропорційна як кількості покупців, що знають про товар, так і кількості покупців, котрим про нього нічого не відомо.

Визначимо закон зміни в часі кількості покупців , які знають про продукцію, якщо в початковий момент часу  про неї дізналися  чоловік (час відраховується від моменту оголошення реклами),  - задане число.

Оскільки швидкість зміни кількості покупців, які знають про продукцію, виражається похідною , то дістанемо диференціальне рівняння

, (16.6)

де  - кількість покупців, які знають про продукцію;  - кількість тих, що не знають про неї в момент часу ;  - коефіцієнт пропорційності.

**2. Основні поняття та означення. Класифікація диференціальних рівнянь**

Переважна більшість процесів техніки, управління, економіки тощо, які розгортаються в часі, задовольняють диференційними або різницевими рівняннями (залежно від того, який це процес – неперервний чи дискретний ).

***Означення.******Диференціальним*** *називається рівняння, що пов’язує незалежну змінну, її функцію та похідні різних порядків цієї функції.*

Найвищий порядок похідної цієї функції називається ***порядком рівняння*.** Так, ***диференційне рівняння першого порядку*** може бути записане у формі

. (16.7)

***Означення.*** *Рівняння, які залежать тільки від одного аргументу, називаються* ***звичайними диференційними рівняннями***.

Загальним прикладом звичайного диференціального рівняння є рівняння (16.7); рівняння  - звичайне диференціальне першого порядку; рівняння  - звичайне диференціальне третього порядку;  - диференціальне рівняння другого порядку тощо.

***Зауваження.*** Варто зазначити, що у деяких випадках рівняння (16.7) може не містити змінні  або , але похідна  обов’язково повинна бути – без похідної диференціальне рівняння вироджується у звичайне.

Крім звичайних диференційних рівнянь, існують *диференційні рівняння в частинних похідних*: шукана функція залежить від кількох аргументів. Найпростіше диференційне рівняння з частинними похідних першого порядку з двома змінними в загальному випадку записується так:

. (16.8)

Обмежимося розглядам лише звичайних диференційних рівнянь.

***Означення.******Розв’язком (інтегралом)*** *звичайного диференціального рівняння першого порядку називається така функція , яка при підстановці в дане рівняння перетворює його у тотожність, тобто* . (16.9)

***Означення.*** *Графік розв’язку диференціального рівняння називають* ***інтегральною кривою.***

Процес знаходження розв’язків диференціального рівняння називається *інтегруванням даного рівняння****.***

Розв’язки звичайного диференційного рівняння (16.7) поділяють на *загальні* (які містять довільну константу *С*) та *частинні (часткові)*, у яких довільна стала *С* набуває конкретного значення.

***Означення****.* ***Загальним розв’язком диференційного рівняння першого порядку*** *називається така функція двох змінних , яка залежить від довільної сталої С і задовольняє умовам: *

*1) яка б не була довільна стала С, функція  задовольняє диференційне рівняння;*

*2) завжди знайдеться таке значення С=, що функція  задовольняє* ***початковій умові***

*.* (16.10)

Задача знаходження розв’язку рівняння, який задовольняє початкові умови, називають *задачею Коші*.

***Означення. Частковим (частинним) розв’язком*** *диференційного рівняння називають функцію , яка одержується із загальної  при певному значенні довільної сталої .*

**3. Найпростіші типи диференціальних першого порядку (рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними; однорідні)**

Розглянемо найпростіші типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх розв’язання.

**а) Рівняння з відокремленими змінними**

***Означення. Диференціальним рівнянням з відокремленими змінними***  *називається рівняння виду*

. (16.11)

Тобто, це рівняння де один доданок залежить лише від змінної , а інший – від змінної . Щоб знайти розв’язок такого рівняння необхідно проінтегрувати обидві його частини. Тоді, загальний розв’язок (інтеграл) рівняння (16.11) набуде вигляду:

, (16.12)

де .

**Завдання.** Запишіть загальний розв’язок диференційного рівняння першого порядку  та дослідіть, який вигляд матиме інтегральна крива даного рівняння.

*Розв’язання*

Рівняння, що пропонується умовою завдання – це рівняння з уже відокремленими змінними. Для його розв’язання використаємо формулу (16.12), згідно якої:

.

Враховуючи, що , а тому й , матимемо:

, або .

Отриманий розв’язок є рівнянням кола радіусу . Оскільки  - довільна стала, то і графіком буде не одне, а безліч кіл. Кажуть, що розв’язком рівняння  є сім’я кривих (у нас – концентричні кола), загальне рівняння яких .

**Відповідь:** .

**б) Рівняння з відокремлюваними змінними**

***Означення. Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними*** *(або зі змінними, що відокремлюються)**називається рівняння виду*

. (16.13)

Як бачимо, у рівнянні (16.13), на відміну від (16.11), кожен доданок залежить не від однієї, а від двох змінних. Кажуть, що для розв’язання даного рівняння змінні необхідно відокремити, тобто рівняння (16.13) треба звести до вже відомого рівняння з відокремленими змінними.

Для цього виконаємо ділення обох частин рівняння (16.13) на множник . Тобто:

.

Після скорочення рівняння перетвориться у рівняння з відокремленими змінними

. (16.14)

Тоді загальний розв’язок рівняння (16.13) можна записати у вигляді:

. (16.15)

**Завдання.** Розв’яжіть диференційне рівняння .

*Розв’язання*

Проаналізувавши умову завдання бачимо, що це – рівняння зі змінними, що ще треба відокремити адже і в першому, і в другому доданках лівої частини міститься  та . Зведемо дане рівняння до виду (16.14) поділивши обидві частини на деякий вираз. Щоб встановити вигляд множника на який потрібно вираз ділити скористаємось умовою завдання.

Зрозуміло, що для того, щоб виконати інтегрування за формулою (16.15) перший доданок повинен залежати від змінної  (бо є ), а другий – від  (бо є ). Тобто, перший доданок потрібно скоротити на вираз , а другий – на . Спільним для обох додатків і буде множник .

Тоді, дане диференціальне рівняння можна переписати

, або .

Проінтегрувавши обидві частини даної рівності, матимемо:

;

;

.

**Відповідь:** .

**Завдання.** Знайдіть частковий розв’язок диференційного рівняння , який задовольняє початкову умову .

*Розв’язання*

Спочатку знайдемо загальний розв’язок даного рівняння, попередньо відокремивши змінні:

;

;

;

;

;

.

Отримана рівність і є загальним розв’язком нашого рівняння. Щоб знайти його частинний розв’язок потрібно використати початкову умову  (підставити значення змінних  та  у загальний розв’язок замість  та ) і знайти конкретне значення довільної сталої . Оскільки, , тобто , , то

 та *С*=1.

Тоді частковий розв’язок набуде вигляду:.

**Відповідь:** 

**в) Однорідні рівняння**

***Означення.*** *Рівняння виду  називається* ***неоднорідним****, якщо  тотожно не дорівнює нулю, й* ***однорідним****, якщо .*

Тобто, однорідним буде рівняння

. (16.16)

Існує декілька способів розв’язання рівняння (16.16). Найпростіший з них – метод, запропонований швейцарським математиком Йоганном Бернуллі. Згідно з ним, однорідне рівняння за допомогою підстановки

 (16.17)

зводять до рівняння з відокремленими змінними.

**Завдання.** Розв’яжіть рівняння .

*Розв’язання*

Скористаємось підстановкою  та знайдемо значення похідної , що входить до умови завдання. За правилом диференціювання добутку двох функцій маємо:

, або .

Отже, рівняння набуде вигляду

. (16.18)

Нехай . Тоді

;

;

, тобто 

Підставивши знайдене значення  у рівняння (16.18) та про інтегрувавши отриманий вираз матимемо

.

Тоді, загальним розв’язком однорідного рівняння буде функція

.

**Відповідь:** .

**4. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами**

***Означення.*** *Рівняння виду  називається* ***лінійним*** *відносно шуканої функції та її похідної.*

Якщо , то рівняння називається лінійним однорідним і набуває вигляду

. (16.19)

Однорідні рівняння типу (16.16), тобто , в яких функція  - стала, називають ***рівнянням зі сталими коефіцієнтами***. Загальний розв’язок таких рівнянь шукатимемо у вигляді .

Після підстановки в рівняння (16.16) матимемо рівняння

, (16.20)

яке можна переписати у вигляді

. (16.21)

Це є ***характеристичне рівняння***.

При розв’язуванні лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами використовують твердження, яке є характерним для всіх лінійних рівнянь, а не тільки для рівнянь першого порядку.

**Теорема.** *Загальний розв’язок неоднорідного рівняння  має вигляд , де  - загальний розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння , а  - частинний розв’язок відповідного неоднорідного рівняння.*

*Завдання для колективної роботи*